Компьютерные инструменты в образовании, 2020
№ 4: 93–112
УДК: 378.147:004.942
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2020-4-93-112

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ В ПРОГРАММАХ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ *

Дубровский В. Н.[1], кандидат физико-математических наук, ✉ dvn18@yandex.ru

[1]Специализированный учебно-научный центр (факультет) — школа-интернат имени А. Н. Колмогорова Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, ул. Кременчугская, д. 11, 121352, Москва, Россия

Аннотация

Представлены различные способы визуализации функций и геометрических преобразований плоскости, встречающихся в школьном курсе, с помощью систем динамической геометрии «Математический конструктор», «Живая Математика», GeoGebra и сценарии их использования в духе современных тенденций в образовании. Обсуждаются новые возможности, возникающие благодаря использованию компьютерных моделей при изучении функций и их свойств. Основное внимание уделено специфически компьютерным интерпретациям функций, в частности, так называемым динографикам (dynagraph), в которых используются параллельные оси аргументов и значений, а соответствие, задаваемое функцией, обнаруживается при движении точки-аргумента по своей оси.

Ключевые слова: *визуализация, динамическая геометрия, динографики, линии уровня, график функции, геометрические пребразования, алгебра в школе.*

Цитирование: Дубровский В. Н. Визуализация функциональных зависимостей в программах динамической геометрии // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 4. С. 93–112. doi: 10.32603/2071-2340-2020-4-93-112

1. ВВЕДЕНИЕ

Системы динамической геометрии (СДГ) появились около 30 лет назад как средство компьютерной поддержки преподавания геометрии. В последующие годы область их применения существенно расширилась. Так, в самой популярной среди них на сегодня программе GeoGebra собственно «динамическая геометрия» — лишь одна из многих компонент, наряду с системой компьютерной алгебры, электронными таблицами и др. Однако нам представляется, что ключевые идеи динамической геометрии продолжают играть особо важную роль для школьной математики. К ним относятся:

— визуализация всех рассматриваемых математических объектов;
— возможность вариации конструкций «на лету», путем перетаскивания мышью исходных точек с сохранением алгоритма построения;
— приобретение новых знаний, опыта через конструирование и эксперимент с построенными моделями.

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ номер 19-29-14217.

Мы рассмотрим способы реализации этих идей при изучении разнообразных функциональных зависимостей, встречающихся в курсе школьной алгебры на разных его уровнях. Наибольшее внимание будет уделено примерам, связанным с экспериментами и исследованиями, «управляемыми открытиями» математических фактов, нестандартными способами визуализации. Почти все рассматриваемые в статье компьютерные модели можно так или иначе реализовать во всех актуальных на сегодня СДГ. Мы, в основном, будем давать краткие пояснения к их построению в среде «1С:Математический конструктор» и необходимые дополнительные комментарии об особенностях «Живой Математики» (или The Geometer's Sketchpad) и GeoGebra.

2. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИ

2.1. Плюсы и минусы компьютерных графиков

Самый известный способ визуализации функции одной переменной — это её график. Сам по себе он не имеет прямого отношения к компьютеру, но все современные программы динамической геометрии умеют строить график функции по её формуле, а кроме того, в зависимости от программы, касательную к графику в данной его точке, точки локального экстремума, точки пересечения графиков, «подграфик» (криволинейную трапецию) и т. п. Компьютерные графики удобны для демонстрации свойств функций, графического решения уравнений. С другой стороны, наличие графопостроителей создает и очевидные проблемы при изучении соответствующих разделов курса алгебры в рамках традиционного, сложившегося за много десятилетий корпуса задач. В значительной части, если не в большинстве этих задач, требуется исследовать функцию и построить эскиз её графика. Но если график строится на компьютере автоматически, то задачи в такой постановке в той или иной мере теряют смысл. Один из способов сохранить ценность предварительного исследования функций — сыграть на неизбежных ограничениях точности вычислений и отображения графиков на экране. Приведем два примера.

1. Построить график функции $\dfrac{x^2-1}{x-1}$. Ответ — прямая $y = x + 1$ с выколотой точкой $(1;2)$. Но, например, GeoGebra показывает здесь сплошную прямую.

2. Более сложный (и довольно известный) пример: найти число решений уравнения $\left(\frac{1}{16}\right)^x = \log_{\frac{1}{16}} x$. Если построить эскизы графиков левой и правой частей «вручную» на бумаге, то создается впечатление, что они пересекаются в одной точке — на прямой $y = x$ (функции в левой и правой частях уравнения взаимно-обратные и их графики симметричны относительно этой прямой). Компьютерные графики не противоречат этому впечатлению, хотя на участке примерно от $0,22$ до $0,56$ они почти сливаются. Но можно угадать другой корень, $x = \dfrac{1}{2}$, а с ним, по симметрии, и еще один: $x = \dfrac{1}{4}$. При этом GeoGebra находит только одну точку пересечения, а именно, $x = \dfrac{1}{2}$ (рис. 1).

Эти примеры показывают, что не следует слишком бездумно доверять компьютерным графикам, но все же такие задачи-ловушки являются экзотикой, а с развитием программного обеспечения поводов к ним становится всё меньше. Так, например, «Живая Математика» правильно решает задачу 2, а «Математический конструктор» — обе (рис. 2). Поэтому остается актуальной задача создания корпуса разнообразных упражнений на функции и графики, в которых использование компьютера сочеталось бы с необходимостью проводить исследование функций обычными средствами.

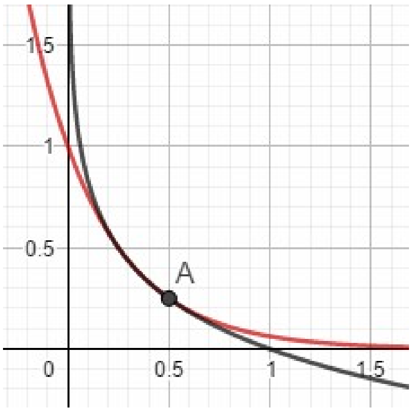


Рис. 1

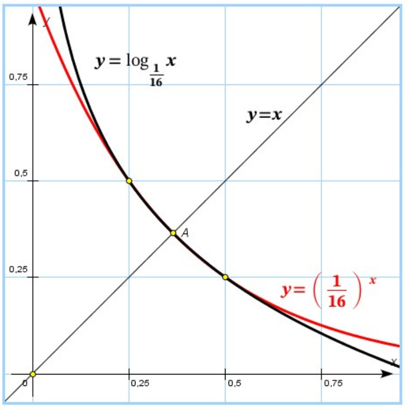


Рис. 2

С другой стороны, СДГ позволяют ставить новые, специфически компьютерные задачи о функциях и графиках.

2.2. Построения по определению

Изучение графиков в школе начинается с их построения по точкам. Можно повторить это построение на компьютере: берется точка на оси абсцисс, находится её координата x, вычисляется значение функции $f(x)$ и строится точка $P(x)$ с координатами $\big(x; f(x)\big)$. Но если на бумаге мы строим только конечное число точек графика, а затем тем или иным способом соединяем их линиями, то на экране компьютера достаточно построить одну точку, а линия — график функции — появляется или как след этой точки при перемещении точки x по оси или как геометрическое место точек $P(x)$. Интересно, что в первых программах динамической геометрии, в частности, в первой версии The Geometer's Sketchpad, графики нужно было строить именно так, «вручную», а специального инструмента-графопостроителя не было. Построение непосредственно по определению способствует усвоению самих понятий функции и графика.

Еще один вид заданий, в которых «построение по определению» очень полезно, — это задачи на преобразование графиков, в которых то или иное алгебраическое преобразование функции или аргумента переводится на язык геометрических преобразований графиков и обратно. Можно просто применить алгебраическое преобразование к функции, построить график того, что получится, и сравнить с исходным графиком. Но более поучительно построить преобразованный график непосредственно из данного, причем не пользуясь формулой, задающей функцию. Рассмотрим, например, построение графика функции $f(x-1)$ по данному графику $f(x)$ (рис. 3).

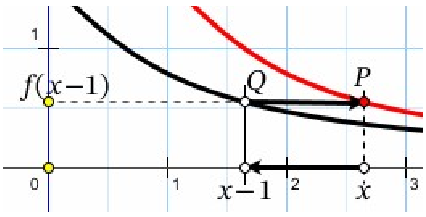


Рис. 3

Берем произвольную точку x на оси абсцисс, строим точку с координатой $x-1$ (например параллельным переносом), затем вертикальную прямую, проходящую через $x-1$, точку Q её пересечения с графиком и, наконец, точку P пересечения горизонтальной прямой, проведенной через Q, и вертикальной, проведенной через x. Точка P имеет координаты $\bigl(x; f(x-1)\bigr)$ и при изменении положения исходной точки x вычерчивает график $f(x-1)$.

Для большей наглядности коэффициенты преобразований можно сделать изменяемыми и увидеть, например, что график функции $f(x-a)$ при увеличении a сдвигается влево, а не вправо, причем из построения понятно, почему так происходит.

2.3. Исследование зависимости графика от параметров

Одной из наиболее естественных областей применения СДГ при работе с графиками функций является исследование функций, зависящих от параметров (см., например [1]). После того, как в структуру ЕГЭ были включены алгебраические задачи с параметрами, причем допускающие графическое решение, компьютерные модели, иллюстрирующие такие решения, стали общим местом, одним из наиболее востребованных применений динамических графиков. Мы приведем менее известный пример, основанный на одном из заданий математического практикума в школе им. А. Н. Колмогорова при МГУ.

Приведенные квадратные уравнения $x^2+px+q=0$ изображаются с помощью двух координатных плоскостей, точнее, двух окон (фреймов) с системами координат (рис. 4). В одном фрейме строится точка P с координатами (p, q), в другом, (x, y)-фрейме, — парабола, график левой части уравнения; в качестве её коэффициентов используются координаты точки P. Перемещая точку P, мы перемещаем и параболу в (x, y)-фрейме. С другой стороны, для каждого фиксированного значения x множество точек p, q, для которых x будет корнем соответствующего уравнения, — это прямая, которая называется *корневой прямой*. Огибающей семейства всех корневых прямых является *дискриминантная парабола* $q=\frac{p^2}{4}$. В основном задании практикума требуется найти множество точек (p, q), для которых корни уравнения лежат в заданных интервалах.

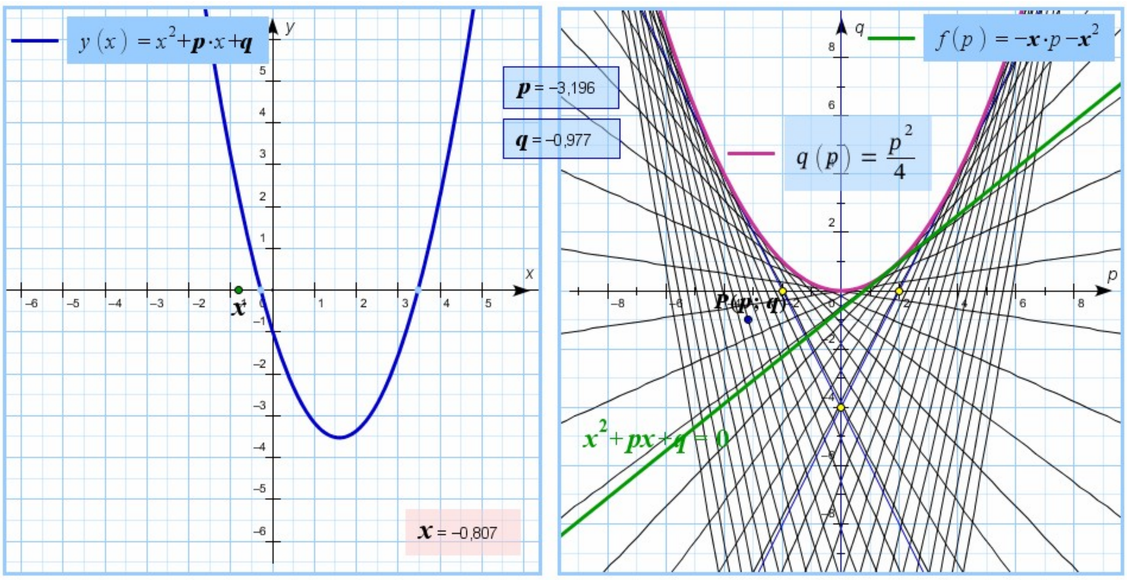


Рис. 4

Подробнее об этом практикуме (в его «бумажном» варианте) см. [2]. Там же приводятся задачи, которые продолжают задания практикума и могут стать основой исследовательских работ школьников. Данный пример интересен ещё и тем, что здесь мы имеем дело с двумя видами отображений: квадратичной функцией и отображением плоскости параметров в множество парабол.

3. ГРАФИКИ БЕЗ ФОРМУЛ

Выше уже говорилось о том, что графики можно строить не только с помощью специальных инструментов, но и как кривые (геометрические места), вычерчиваемые точками, координаты которых связаны данной функциональной зависимостью, причем зависимость можно задавать геометрически — через построения и измерения. Таким образом, мы можем по результатам эксперимента построить график функции, формула которой неизвестна. Опираясь на график, можно исследовать свойства изучаемой зависимости, а иногда и найти выражающую её формулу.

Рассмотрим примеры.

Производная и первообразная. Если в программе имеется инструмент для построения касательной к кривой в её произвольной точке, то можно измерить угловой коэффициент $k(x)$ касательной к графику $f(x)$ в точке x оси абсцисс и построить геометрическое место точек $\big(x, k(x)\big)$; это будет график производной функции f. Аналогично можно построить и график первообразной как геометрическое место точек $\big(x, S(x)\big)$, где $S(x)$ — площадь криволинейной трапеции, ограниченной вертикальными прямыми, проведенными через фиксированную точку a и переменную точку x оси абсцисс, и графиком функции f. Оба построения можно выполнить непосредственно по графикам, не пользуясь формулами функций, что позволяет, например, построить график $S(x)$ для функции $k(x)$ или наоборот, и сравнить результаты с исходным графиком. Получим экспериментальное подтверждение формулы Ньютона-Лейбница.

В данном примере «графики без формул» используются для иллюстрации понятий и теорем. Далее рассмотрим примеры того, как с их помощью учитель может организовать на уроке «управляемое открытие» (guided discovery).

Теорема Пифагора. Поставим задачу: найти зависимость между площадями квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника с фиксированной гипотенузой. Модель представляет собой полуокружность с фиксированным диаметром AB, вписанный в нее треугольник ABC с подвижной вершиной C на дуге и квадраты на катетах. Измеряем их площади $S(AC)$ и $S(BC)$ и строим след[1] или геометрическое место точек с координатами $\big(S(AC), S(BC)\big)$ при перемещении C по полуокружности. Получаем отрезок, соединяющий две точки на положительных полуосях координат, соответствующие крайним положениям подвижной вершины: $C = A$ и $C = B$. Эти точки удалены от начала на одинаковое расстояние — площадь $S(AB)$ квадрата на AB. Из уравнения прямой ($x + y = const$) получаем, что $S(AC) + S(BC) = S(AB)$: эксперимент приводит нас к «открытию» теоремы Пифагора (рис. 5). Справедливости ради надо сказать, что данный эксперимент несколько искусственный: может возникнуть вопрос, почему мы сопостав-

[1] «Следом» точки в динамической геометрии называют траекторию, которую она рисует при движении по экрану. Рисование следа включается и выключается специальной командой. Можно рисовать следы не только точек, но и линий, областей и вообще любых геометрических объектов. Сам след, в отличие от «геометрического места точек» или «динамического следа», не является геометрическим объектом: нельзя его передвинуть, взять на нем точку и т. п.

ляем именно площади квадратов, а не, например, длины катетов. В следующем примере аналогичный вопрос не возникает.

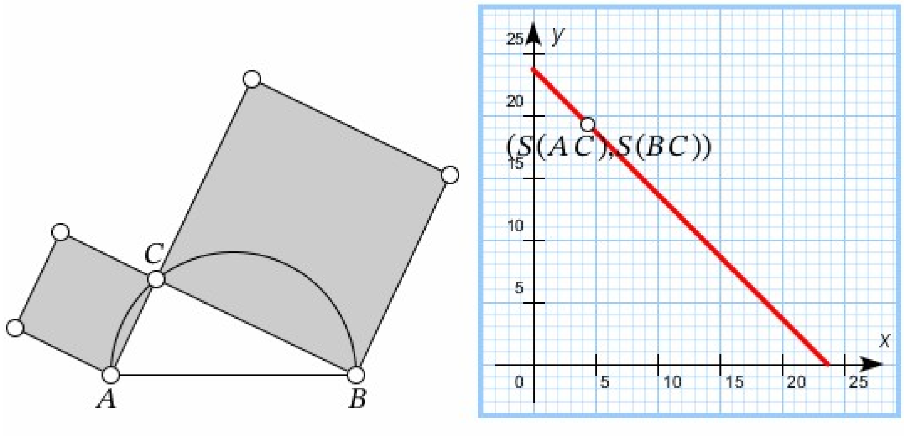


Рис. 5

Теорема Менелая. Кратко опишем эксперимент, приводящий к «открытию» нетривиальной формулы из теоремы Менелая; более подробное его описание с комментариями и интерактивными моделями приведено в материале автора на сайте [3]. Построим треугольник ABC и прямую, пересекающую стороны AB и AC в произвольно взятых на них точках K и L. Двигая точку A, можно заметить, что прямая KL проходит через постоянную точку M, причем эта точка лежит на прямой BC. (Чтобы удостовериться в этом наблюдении, достаточно включить рисование следа прямой.) Сами точки K и L сохраняют при этом свое положение на отрезках, точнее, сохраняются отношения, в которых они делят содержащие их стороны. *Вывод:* отношения $l = CL : LA$ и $k = AK : KB$ однозначно определяют отношение $m = BM : MC$. Попробуем найти аналитическое выражение для этой зависимости. Фиксируем, например, l, измерим k и m, и построим геометрическое место точки (k, m) при условии, что K пробегает AB, то есть график зависимости m от k. Получившаяся кривая очень похожа на гиперболу. Перемножив для проверки измеренные значения k и m, убедимся, что действительно $km = const$. Понятно, что константа здесь может зависеть только от l. Отсюда следует, что и произведение kml может зависеть только от l. Но точно так же можно показать, что kml может зависеть только от k, а значит, это произведение постоянно. Подставляя конкретные измеренные значения или рассматривая хороший частный или предельный случай, найдём, что $kml = 1$. Это и есть теорема Менелая. Подчеркнем: именно построенная кривая подсказывает, что надо проверить обратную пропорциональность двух отношений.

Разумеется, подобные открытия теорем не являются доказательствами. Вопрос о том, нужно ли их доказывать дедуктивно и как в этом может помочь компьютер, мы здесь не обсуждаем. В любом случае, подобным образом можно не только «открывать» известные теоремы в учебных целях, но и искать новые факты или решения незнакомых задач.

4. ДИАГРАММЫ ФУНКЦИЙ И ДИНОГРАФИКИ

Задолго до того, как компьютер стал одним из средств преподавания математики, отображения и их свойства иллюстрировались условными картинками, на которых точки области определения соединялись стрелками с точками множества значений. Такие картинки называются *диаграммами отображений*. С их помощью удобно объяснять, чем отображения отличаются от произвольных бинарных отношений, что такое инъективность и сюръективность, что такое композиция отображений и обратное отображение, при каких условиях последнее существует и т. п. В случае функций действительной переменной диаграмма состоит из двух числовых осей, которые обычно размещают параллельно друг другу (горизонтально или вертикально), — оси аргументов (*входа*) и оси значений (*выхода*) — и соединяющих их соответственные точки стрелок. Как указано в [4], такой способ представления функций обнаруживается уже в работах Дж. Непера по логарифмам. Он использовался и в ряде гораздо более современных книг и статей, отметим, в частности, [5], где диаграммы функций обсуждаются в качестве средства визуализации таких понятий из анализа, как непрерывность, производная и т. п.

4.1. Компьютерные модели: от диаграмм к динографикам и обратно

Системы динамической геометрии упрощают построение диаграмм функций и открывают новые возможности для их использования. Технология построения различается в разных программах. Так, в «Математическом конструкторе», благодаря наличию инструментов, обеспечивающих непосредственный доступ к «внутренней» координате точки на прямой относительно базисных точек 0 и 1 (задаваемым способом построения прямой), можно измерить координату x свободной точки X на оси входа и присвоить значение $f(x)$ координате точки Y на оси выхода, где f — функция, диаграмму которой мы строим. Если функция f заранее заготовлена как отдельный объект, то её можно будет менять, то есть наша модель будет универсальной. Соединив точки X и Y отрезком со стрелкой, получим своего рода «диаграмму функции с единственной стрелкой», но благодаря тому, что точку-аргумент X, а вместе с ней точку-значение Y и стрелку XY можно перетаскивать, уже эта конструкция, называемая *динографиком*, будет содержать всю информацию о функции. Динографики как специфически компьютерный способ визуального представления функций в динамике были впервые описаны в 1992 г. в [6], там же был предложен и термин *dynagraph*. За прошедшее время появилась обширная литература, посвященная использованию динографиков, их многочисленные реализации на разных программных платформах, основанные на них задания. Русскоязычные работы по этой теме автору неизвестны, и мы остановимся на ней подробнее.

Если перемещать точку X при включенном рисовании следа стрелки, то последовательность «отпечатков» стрелки образует диаграмму функции. Это самый простой способ превратить динографик в диаграмму. Больше возможностей открывается, если построить стрелки для некоторой последовательности положений точки X с помощью инструмента «динамический след» (в «Математическом конструкторе») или «геометрическое место» (в «Живой Математике»). Построенным семейством отрезков можно управлять — менять частоту линий и диапазон, пробегаемый точкой-аргументом, а главное, можно увидеть, как изменяется диаграмма функции, зависящей от параметров, при их вариации. Ниже мы опишем интересные задания, использующие эту возможность.[2]

Перейдем к примерам применения описанных инструментов.

[2] В программе GeoGebra динографики строятся иначе: в качестве координат на осях используются «глобальные» координаты (x, y) на листе, а набор стрелок строится по таблице значений функции на заданной последовательности значений аргумента.

4.2. Упражнения с динографиками

Наблюдая за движением стрелки динографика, мы воспринимаем функцию разворачивающейся во времени, и в этом одно из важнейших отличий динографиков от обычных графиков. Динографики позволяют выделять и описывать самые общие свойства функции, такие как ограниченность, промежутки возрастания и убывания, неподвижные точки, но точные числовые значения при этом почти не используются. Более того, обычно на осях отсутствует разметка, кроме точек 0 и 1, а иногда и они не отмечены.

Опишем различные типы заданий на динографики.

1. **Поиск общего.** Дано несколько динографиков; требуется выделить из них группы с какими-то общими признаками и объяснить свой способ группировки. Это задание можно предлагать и до какого-то систематического знакомства с функциями и их свойствами. Экспериментам с такими заданиями в когнитивном контексте посвящены работы Синклер (см. [7]).

2.**«Анкета функции».** По данному динографику функции $f(x)$ описать её свойства: область определения и множество значений, ограничена ли, сколько имеет нулей, сколько экстремумов, какие у нее промежутки монотонности и т. п.

3. **Оценки коэффициентов.** Дана функция определенного вида (линейная, квадратичная или дробно-линейная). Требуется извлечь из динографика информацию о её коэффициентах. Задачи на определение знаков коэффициентов и дискриминанта квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ по её (обычному) графику давно известны. Замена графиков динографиками позволяет взглянуть на них с другой точки зрения, развивают у учащихся новую интуицию. Такое задание было разработано автором в формате «Математического конструктора» для [8, модель «Динографики»]. Там же можно найти и следующее задание.

4. **Динографики и формулы.** Дано несколько динографиков и — в произвольном порядке— формулы, задающие представляемые ими функции. Требуется установить соответствие между динографиками и формулами. Функции могут быть как одного вида (например, линейные), так и разных видов.

5. **Подбор формул.** Угадать точную формулу функции по её динографику без какой-то дополнительной информации практически невозможно. А. В. Пантуев [9] предложил способ, как сделать это задание более доступным. Вместе с динографиком неизвестной функции g даётся динографик какой-то известной функции f, в определенном смысле «похожей» на g, с той же осью входа; на рисунке 6, где для наглядности показаны не динографики, а диаграммы, диаграмма функции f расположена над осью входа, а функции g — под ней. Требуется отредактировать формулу функции f так, чтобы при всех x значения функций совпадали. Для этого надо подвигать точку-аргумент, посмотреть, чем поведение одной стрелки отличается от другой, и постараться устранить это различие.

6. **Решение уравнений.** На языке динографиков решение уравнения $f(x) = c$ интерпретируется как отыскание прообраза точки c при отображении f: надо сдвинуть начало стрелки так, чтобы её конец попал в точку c. Если на осях динографика, как обычно бывает, нет разметки, то точное числовое значение корня отсюда найти нельзя, но можно исследовать, например, количество корней в зависимости от коэффициентов функции. Аналогичным образом с помощью двух совмещенных динографиков можно исследовать решения системы уравнений с двумя неизвестными, если уравнения приводятся к виду $y = f_i(x),\ \ i = 1, 2, \ldots$. В случае линейных уравнений при поиске и исследовании решений возникают интересные геометрические соображения, о которых будет сказано далее.

7. **Диаграммы и преобразования функций.** Вопрос о том, как преобразуется график функции при линейных преобразованиях аргумента и самой функции, рассматривается

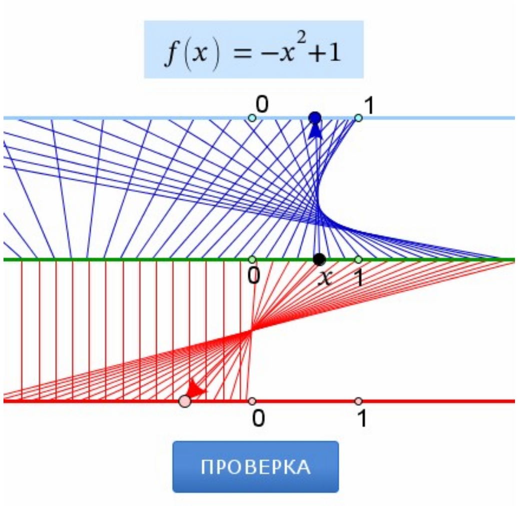


Рис. 6

в любом курсе школьной алгебры. Аналогичный вопрос можно поставить и для диаграмм. Но если преобразования обычных графиков при линейных заменах переменных описать легко — это сдвиги, отражения, сжатия к осям координат, то для диаграмм функций столь же прозрачные описания имеются только в некоторых частных случаях. Разумнее ставить вопрос о том, как строить диаграмму преобразованной функции по диаграмме данной функции. Это позволяет по-новому взглянуть и на преобразования обычных графиков.

Интересный опыт использования описанных типов заданий на дистанционных занятиях по алгебре для учащихся 7–10 классов описан А. И. Сгибневым [10].

4.3. Линейные функции

Динографик, как и диаграмма функции, в явном виде демонстрирует связь между точкой-аргументом и её образом. Поэтому эти инструменты особенно удобны для изучения функций как преобразований прямой. Рассмотрение функций с этой точки зрения приводит к интересным и важным наблюдениям уже для простейших функций — линейных. Отображение $x \mapsto f(x) = ax + b$ (где $a \neq 0$) одной оси динографика в другую является преобразованием подобия: гомотетией с коэффициентом a при $a \neq 1$ и параллельным переносом при $a = 1$, поэтому прямые XY либо проходят через одну точку — центр гомотетии (будем называть её *фокусом* и обозначать F_{ab}), либо параллельны.

Познакомить школьников с этим наглядным и красивым фактом можно уже в 7 классе на первых уроках по линейным функциям, организовав компьютерный эксперимент в формате «управляемого открытия». Начать лучше с $a < 0$. Наблюдая за поведением стрелки динографика при перемещении точки X по оси входа, можно заметить, что она при всех X проходит через какую-то фиксированную точку F между осями, а затем проверить эту гипотезу с помощью следа стрелки. При $a > 0$ существование фокуса не столь очевидно: сами стрелки (отрезки) не пересекаются. Однако диаграмма позволяет предположить, что пересекаются прямые — продолжения стрелок. Построение прямых подтверждает эту гипотезу (рис. 7). Функции вида $y = x + b$, для которых прямые XY параллельны, нужно рассмотреть отдельно.

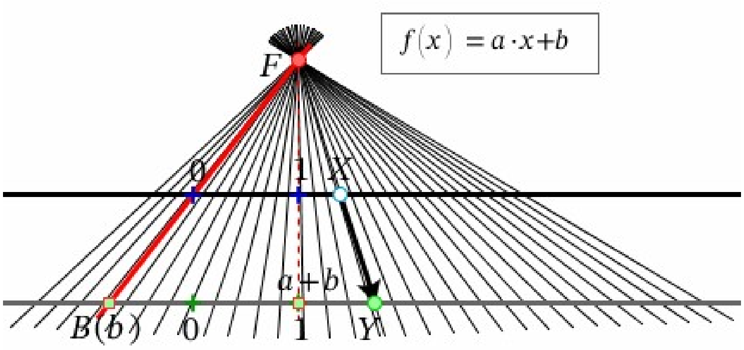


Рис. 7

Продолжая исследование «расширенной диаграммы», то есть семейства прямых (а не стрелок) XY, посмотрим, как изменяется диаграмма нашей линейной функции f при изменении коэффициентов a и b, в частности, как движется точка-фокус. Если фиксировать b и изменять a, то мы увидим, что фокус пробегает некоторую наклонную прямую, проходящую через начало оси входа. Объяснить это совсем просто: $f(0) = b$ при всех a, поэтому фокус всегда лежит на прямой OB, пересекающей ось входа в точке $O(0)$, а ось выхода — в точке $B(b)$. В частности, при $a = 1$ фокус становится бесконечно удаленной точкой этой прямой, а диаграмма превращается в пучок прямых, ей параллельных. Если, наоборот, изменять только b при фиксированном $a \neq 1$, то фокус опишет горизонтальную прямую. Доказать это с 7–8-классниками чуть сложнее: потребуется либо некоторый опыт использования линейных функций и уравнений, либо знакомство с подобием треугольников. Опишем возможный сценарий работы.

Построим точку F пересечения прямых OB и XY. Перемещая X, еще раз проверяем экспериментально, что все прямые диаграммы проходят через некоторую точку F. Вычислим её координаты $(x_0; y_0)$ в системе координат на плоскости, выписав уравнения прямых OB и XY и решив полученную линейную систему. Если за начало O оси входа взять начало координат $(0;0)$, а за начало оси выхода — точку $(0;h)$ (на рис. 7 $h<0$), то получим, что

$$x_0 = \frac{b}{1-a}, \quad y_0 = \frac{h}{1-a}. \tag{1}$$

Отсюда видно, что при изменении b фокус пробегает горизонтальную прямую $y = \frac{h}{1-a}$. Заметим еще, что x_0 — неподвижная точка функции f, то есть решение уравнения $f(x) = x$, что и понятно, поскольку прямая XY для неподвижной точки X вертикальна.

Геометрическое объяснение поведения фокуса при изменении коэффициентов a и b опирается на подобие треугольников FBY и FOX с коэффициентом $BY : OX = |(f(x) - b) : x| = |a|$ (рис. 7). Это равенство останется верным, если убрать знаки модуля и считать отрезки BY и OX направленными. Из него вытекает следующий полезный факт:
с учетом направлений отрезков, фокус F линейной функции $f(x) = ax + b$ делит отрезок BO (как и любой другой отрезок YX) в отношении $FB : FO = a$.

Попутно мы обнаружили геометрический смысл коэффициента a линейной функции: это коэффициент растяжения (или сжатия) задаваемого ею преобразования прямой. Кинематический смысл коэффициента a как отношения скоростей движения X и Y по осям динографика выявляется при перемещении аргумента по оси входа, а с точки зрения обычных графиков a — это угловой коэффициент соответствующей прямой на координатной плоскости. Все три интерпретации можно использовать в дальнейшем при изучении производной.

С помощью фокусов легко строить диаграммы и динографики геометрически: образ любой точки X на оси входа получается пересечением прямой FX с осью выхода. Этим можно воспользоваться, например, чтобы получить из динографика данной линейной функции динографик обратной функции на тех же осях входа и выхода: его фокус будет симметричен F относительно прямой, проходящей посередине между осями. Можно поступить и иначе: оставить фокус на месте, но превратить ось выхода в ось входа и наоборот; тогда свободную точку-аргумент надо брать на новой оси входа. Столь же просто построить динографик композиции линейных функций. Проводим три параллельные оси, x, y, z. Пусть F — фокус функции $y = f(x) = ax + b$, а G — фокус функции $z = g(y) = cy + d$. Пучок прямых с центром F задает отображение $f : x \to y$, пучок с центром G — отображение $g : y \to z$. Построив с их помощью точку $Y = f(X)$ на оси y, где X — произвольная точка на первой оси, и $Z = g(Y)$ на оси z и соединив точки X и Z (рис. 8), получим диаграмму композиции $h = g \circ f$ на осях x и z . Модель показывает интересное свойство: если диаграмма композиции h имеет фокус, точку H (то есть $ac \neq 1$), то H лежит на прямой FG; в противном случае все прямые диаграммы параллельны FG. Данный факт — частный случай «теоремы о трех центрах подобия», известной, в случае центров подобия трёх окружностей, как теорема Монжа.

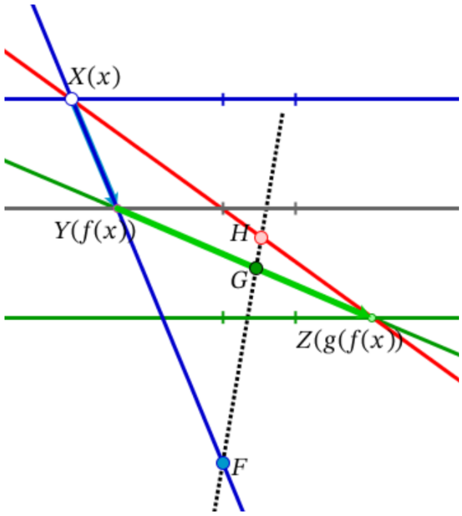


Рис. 8

Геометрический подход применим и к графическому решению линейных уравнений и систем. Чтобы найти решение уравнения $ax + b = c$, достаточно провести прямую из фокуса динографика функции $y = ax + b$ его левой части в точку c на оси выхода; точка x пересечения этой прямой с осью входа и будет корнем уравнения. Для решения системы из двух линейных уравнений с двумя неизвестными, перепишем её в виде

$$\begin{cases} y = ax + b, \\ y = kx + m. \end{cases}$$

(рассматриваем случай, когда коэффициенты исходных уравнений при y ненулевые) и построим фокусы P и Q динографиков этих двух функций на одной и той же паре осей. Тогда искомая точка x лежит на пересечении прямой PQ с осью входа. Если фокусы совпадут, то решений бесконечно много (x — любое число), а если прямая PQ параллельна осям, то решений нет. Обе эти задачи непосредственно связаны с построениями динографиков обратной функции и композиции, описанными выше.

Еще одно применение «расширенные диаграммы» находят при изучении преобразований функций. Например, линейная замена аргумента приводит к функции $f(ax+b)$, являющейся композицией линейной функции $l(x) = ax+b$ и функции f, а диаграмму композиции легко склеить из диаграмм l и f, пользуясь фокусом диаграммы l.

Некоторые из изложенных здесь свойств диаграмм линейных функций обсуждаются с алгебраической точки зрения в [11].

4.4. Динографики и производная. Огибающая диаграммы

Если точка-аргумент, которую мы сейчас обозначим через s во избежание путаницы с x-координатой на плоскости, равномерно движется по оси входа динографика с единичной скоростью, то точка-образ $f(s)$ будет двигаться по оси выхода с переменной, вообще говоря, скоростью $u(s)(= f'(s))$. Наблюдение за изменением последней — еще один путь к развитию представления о функциях и их свойствах, подготовка к знакомству с производной и, прежде всего, её кинематическим смыслом. Для большей наглядности можно построить вертикальный отрезок, проходящий через точку s и аналогичный отрезок через $f(s)$, и включить для отрезков рисование следа, а для дополнительного усиления эффекта покрасить оба отрезка цветом, зависящим от s. Тогда при движении точки s следы отрезка на входе будут располагаться равномерно, а на выходе — гуще там, где скорость ниже, и реже там, где скорость выше, а их раскраска даст уточняющую информацию о соответственных точках осей (рис. 9). С другой точки зрения, плотность отрезков на оси выхода определяется локальным коэффициентом растяжения для данной функции. На этой интерпретации, обсуждаемой в [5, 11], остановимся подробнее.

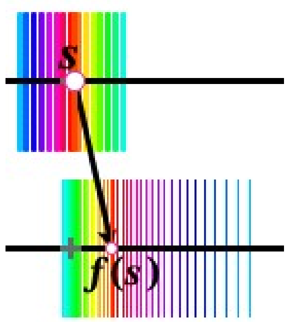


Рис. 9

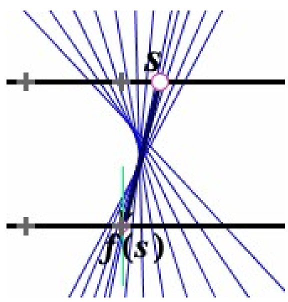


Рис. 10

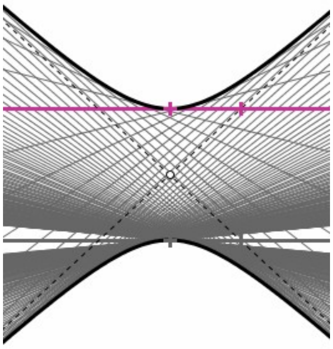
Рассмотрим (расширенную) диаграмму отображения $s \mapsto f(s)$ (рис. 10). Дифференцируемая в точке s_0 функция f в окрестности точки s_0 близка к линейной функции $L_{s_0}(s) = f'(s_0)(s - s_0) + f(s_0)$. Для диаграммы это означает, что составляющие её прямые в окрестности точки s_0 образуют центральный пучок. Как мы видели, его фокус $F(s_0)$ делит отрезок, соединяющий точки $f(s_0)$ и s_0 на соответствующих осях, в отношении $f'(s_0)$. Подставляя коэффициенты функции L_{s_0} в формулы (1), найдём координаты фокуса $F(s_0)$ при $f'(s_0) \neq 1$:

$$x = \frac{f(s_0) - s_0 f'(s_0)}{1 - f'(s_0)}, \quad y = \frac{h}{1 - f'(s_0)} \tag{2}$$

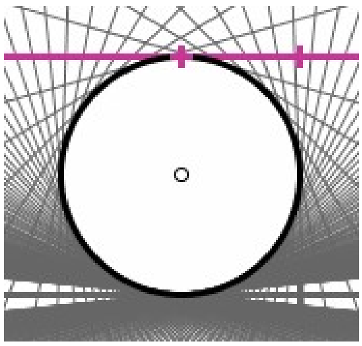
(в предположении, что начала осей входа и выхода имеют координаты $(0;0)$ и $(0;h)$ соответственно).

С методической точки зрения это рассуждение лучше «перевернуть»: начать с наблюдения, что диаграмма локально является центральным пучком, а значит, функцию можно приблизить линейной с некоторым коэффициентом k, вычислить координаты фокуса, интерпретировать k как коэффициент растяжения линейной функции, записать его приближенное значение $\frac{\Delta f}{\Delta s}$ и, наконец, перейти к определению производной или, если оно уже было дано, воспользоваться им. Опираясь на этот подход, легко объяснить «на пальцах» формулу для производной сложной функции: она вытекает из того, что коэффициент растяжения в точке s_0 для композиции $g \circ f$, очевидно, равен произведению коэффициентов растяжения f и g в точках s_0 и $f(s_0)$ соответственно.

После диаграмм линейных функций естественно посмотреть, как выглядят расширенные диаграммы других функций. Это исследование может стать основой для хорошей школьной творческой работы с красивыми результатами. Например, обнаруживается, что в диаграмме функции $\frac{1}{x}$ все прямые касаются гиперболы (рис. 11а), а диаграмма функции $-\frac{1}{x}$ имеет огибающей окружность (если расстояние между осями вдвое больше единичного отрезка осей; рис. 11б). Общее утверждение звучит так:



(а)



(б)

Рис. 11

огибающая расширенной диаграммы дробно-линейной функции $f(s) = \frac{as+b}{cs+d}$ является гиперболой при $ad - bc > 0$ и эллипсом при $ad - bc < 0$. В обоих случаях огибающая касается оси входа в точке $-\frac{d}{c}$, а оси выхода — в точке $\frac{a}{c}$, являющихся, соответственно, прообразом и образом бесконечно-удаленной точки другой оси.

Поясним идею геометрического доказательства. Отображение $s \to f(s)$, задаваемое дробно-линейной функцией, является проективным, так как сохраняет двойное отношение точек. А согласно известной теореме проективной геометрии, если между двумя прямыми l и m установлено проективное соответствие, то огибающая прямых, соединяющих соответственные точки, — это коника, касающаяся обеих прямых l и m. Чтобы разделить случаи эллипса и гиперболы, нужно рассмотреть данное отображение более детально; ниже мы сделаем это из аналитических соображений.

Довольно неожиданно оказывается, что и для квадратичных функций огибающей диаграммы является гипербола, у которой одна из асимптот — ось входа. Это наблюдение тоже удобнее объяснить с точки зрения математического анализа.

Обозначим через $(s, f(s))$ прямую, соединяющую точку s оси входа и точку $f(s)$ оси выхода, а через $[s, f(s)]$ отрезок с теми же концами. Точка, в которой огибающая диаграммы дифференцируемой функции f касается прямой $(s_0, f(s_0))$, есть предельное положение при $s \to s_0$ точек, в которых эту прямую пересекает прямая $(s, f(s))$. Но в достаточно малой окрестности точки s_0 наша диаграмма с любой заданной точностью совпадает с диаграммой наилучшего линейного приближения функции f в точке s_0, то есть с пучком прямых с фокусом $F(s_0)$, а значит, фокус и будет точкой касания огибающей. Мы видели, что он делит отрезок $[f(s_0), s_0]$ в отношении $f'(s_0)$ (с учетом знака); это позволяет построить в СДГ сначала фокус, а затем и огибающую, как геометрическое место фокусов. У нас уже есть и параметрические уравнения огибающей — это уравнения (2) для координат фокуса.

Вернемся к приведенному выше утверждению об огибающей диаграммы дробно-линейной функции. Найдя производную функции $\frac{as+b}{cs+d}$, мы увидим, что её знак совпадает со знаком $ad - bc$. Поэтому при $ad - bc < 0$ локальные фокусы и образованная ими коника лежат между осями входа и выхода (случай эллипса), а при $ad - bc > 0$ — вне полосы, заключенной между осями (случай гиперболы).

Если удается исключить параметр из уравнений огибающей, мы получаем её уравнение в декартовых координатах. В частности, если координаты выбраны так, что оси входа и выхода — это прямые $y = 0$ и $y = -2$, то для $f(s) = -\frac{1}{s}$ уравнение огибающей принимает вид $(y-1)^2 - x^2 = 1$ и задает равнобокую гиперболу, для $f(s) = \frac{1}{s}$ получим окружность радиуса 1 с центром $(0;-1)$, а для квадратичной функции $f(s) = s^2 + 0{,}25$ огибающая является гиперболой с уравнением $y = \frac{1}{2x-1}$. Эти результаты легко обобщаются на произвольные дробно-линейные и квадратичные функции.

Подчеркнем еще раз наиболее важные и, как нам кажется, заслуживающие внимания особенности динографиков и диаграмм функций как инструментов компьютерной поддержки функционально-графической линии в школьном курсе алгебры:

— динографики и диаграммы моделируют функции как преобразования прямой и, благодаря этому, в явном виде помещают функции в общий контекст отображений, их свойств и связанных с ними понятий, устанавливают связи между алгеброй, анализом и геометрией;

— динографики показывают функции разворачивающимися во времени, активизируют у учащихся в дополнение к визуальному тактильный и кинестетический каналы восприятия, характерные для работы с моделями динамической геометрии вообще;

— диаграммы представляют интерес как самостоятельный объект изучения, позволяют сформулировать новые задачи, темы для творческих работ школьников.

5. ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.1. Трехмерные графики

Стандартный способ визуального представления действительно-значной функции двух переменных — график в трехмерной системе координат. В школьной математике необходимость в изображении поверхностей, задаваемых уравнениями вида $z = f(x, y)$, почти не возникает, кроме того, эта задача для «двумерных» программ динамической геометрии трудоемкая, хотя и решаемая с помощью семейств кривых, образующих поверхность. Поэтому на этом способе мы останавливаться не будем, а рассмотрим другой, двумерный способ визуализации функций, заданных на плоскости, полезный в ряде «школьных» алгебраических и геометрических задач.

5.2. Карты линий уровня

В программе Geogebra и «Математическом конструкторе» есть инструменты для построения линий уровня функции $f(x, y)$, то есть графиков уравнений вида $f(x, y) = c$. С помощью следа или «динамического следа» можно получить представление о *карте линий уровня* (рис. 12) — семействе таких кривых при всевозможных значениях c, а тем самым, и о функции в целом.

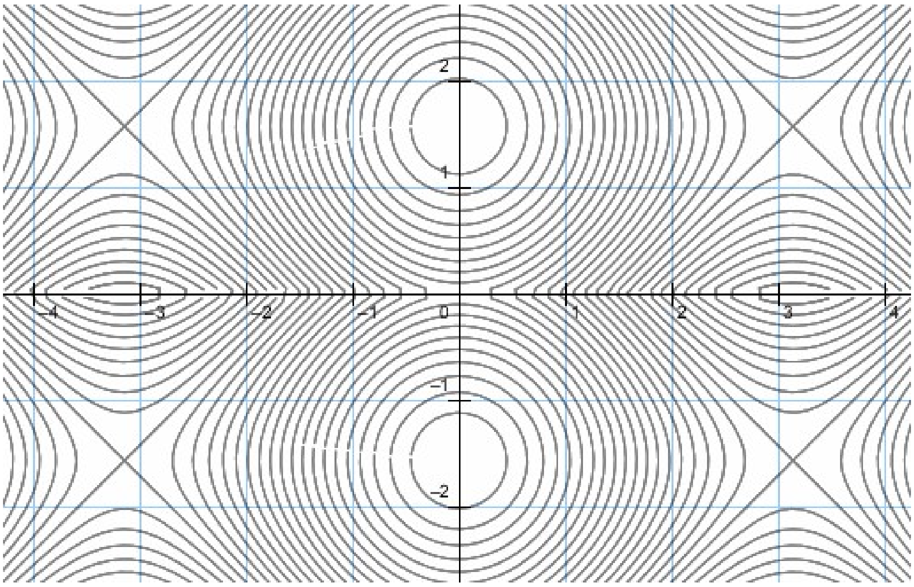


Рис. 12. Карта линий уровня функции $cos\{x\} + |sin\{y\}|$

В школьной алгебре линии уровня полезны при исследовании решений систем алгебраических уравнений с параметром для визуализации множества решений уравнения $f(x, y) = a$. Впрочем, в данном случае нужнее не столько вся карта линий уровня как единый объект, сколько одна подвижная линия уровня, зависящая от параметра, который можно варьировать мышью. В геометрии линии уровня возникают как геометрические места точек P, для которых постоянно значение некоторой функции $f(P)$. Если выразить её аналитически через координаты точки P, то мы сможем использовать описанные выше программные инструменты. Например, в случае суммы квадратов расстояний от точки P до нескольких данных точек мы увидим семейство концентрических окружностей и поймем, что для «теоретического» решения задачи отыскания соответствующего геометрического места нужно преобразовать уравнение линии уровня к уравнению окружности. Но уже для такой простой геометрической функции как $f(P) = \angle APB$ (то есть угол, под которым данный отрезок виден из точки P) аналитический подход не очень целесообразен: функция простая и легко вычисляется непосредственным измерением угла, доступным семиклассникам, а её выражение в координатах относительно сложное, использует обратные тригонометрические функции. Существует эффектный способ построения карты линий уровня функции $f(P)$, применимый к любой функции и любому способу вычисления её значения: плоскость раскрашивается так, что цвет каждой точки P зависит от значения $f(P)$. В результате мы увидим структуру карты линий уровня, так как каждая из них будет окрашена одним цветом, а на разных линиях цвет будет разным. Точнее, правило окраски нужно задать так, чтобы цвета «соседних» линий уровня были хорошо различимы; при этом достаточно далекие линии могут иметь и одинаковый цвет. Для этого функция f «пропускается» через периодическую функцию с достаточно малым периодом; получающийся узор на плоскости для функции $\angle APB$ показан на рис. 13.

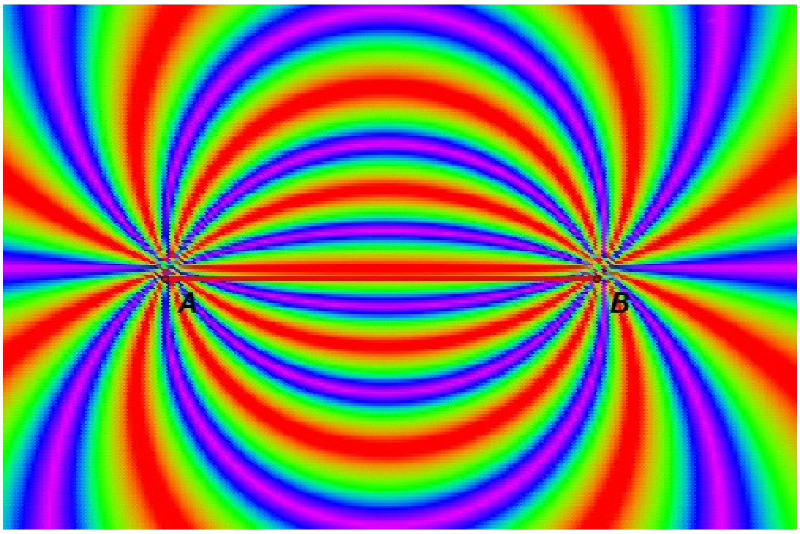


Рис. 13. «Цветовая» карта линий уровня для $f(P) = \angle APB$

Чтобы получить такую окраску плоскости, нужно сначала раскрасить подвижную горизонтальную прямую в зависимости от значений функции $f(P)$ на её точках, для чего эта прямая строится как «динамический след» точки P. Затем на этой цветной прямой включается рисование следа и она перемещается вдоль всей высоты экрана, оставляя за собой окрашенную плоскость. Хороший результат дает анимация. Эта красивая демонстрация работает в «Живой Математике» и «Математическом конструкторе».[3] Её можно использовать в классе до того, как будет изучена теорема о вписанном угле (в силу которой линии уровня здесь являются парами дуг, симметричных относительно AB), чтобы подвести к «открытию» этой теоремы. Описанный способ построения карты линий относительно несложен, нагляден и универсален: чтобы получить карту линий уровня для любой другой функции $f(P)$, независимо от того, как она задается — геометрически, измерениями или аналитически через координаты точки P — достаточно отредактировать определение использованной функции.

Компьютерное построение карты линий уровня можно использовать не только при поиске решений задач на геометрические места точек, но и в геометрических задачах на отыскание экстремального значения функции на кривой (или прямой) Г. Многие из этих задач можно решить с помощью следующего «принципа касания»: *если функция $f(P)$ достигает своего экстремального значения на кривой в точке M, то в этой точке кривая* Г *касается линии уровня $f(P) = const$* (конечно, это утверждение справедливо только при выполнении ряда условий, на которых мы не останавливаемся). Интересные примеры применения принципа касания в геометрии приводятся в [13, § 5].

[3] Различные способы визуализации функций двух переменных в программе GeoGebra можно найти на её сайте (см. например [12]). Представленные там, в основном, сложные многопараметрические модели используют аналитическое задание функций и выходят за рамки школьной программы.

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

Школьники встречаются с отображениями плоскости в себя при изучении геометрических преобразований — движений и подобий. Это одна из тех областей математики, где динамическая геометрия находит наиболее естественные и очень разнообразные применения, но которой, к сожалению, уделяется недостаточно внимания в современных учебниках. Исследовать свойства заданного преобразования F можно с помощью модели, аналогичной динографику или диаграмме функции: на плоскости берется произвольная точка X и строится её образ $Y = F(X)$; при перемещении X соответственно перемещается и Y. Будем называть полученную конструкцию *моделью преобразования* F. Она аналогична динографику функции одной переменной; отличие в том, что область определения (плоскость), она же и множество значений, не дублируется. В случае функций мы тоже могли бы обойтись одной осью, но потеряли бы при этом в наглядности. Соединив точки X и Y отрезком или вектором, получим диаграмму, а лучше сказать, динамическую диаграмму отображения F, дающую больше информации об отображении. Возможны и модели с двумя экземплярами плоскости, причем двух типов. Можно создать на экране рядом друг с другом два «полотна» или «фрейма» со своими системами координат, поместить на один фрейм точку X, а на другом построить точку Y с координатами, равными координатам образа точки X. Второй способ — разместить фреймы в параллельных плоскостях в пространстве, аналогично двум осям динографика. Таким «двухэтажным» динамическим диаграммам комплексных функций, построенным в GeoGebra 3D, посвящена работа [4]; в частности, в случае линейных функций они превращаются в диаграммы преобразований подобия. Компьютерные модели наглядно демонстрируют одинаковую природу функций и преобразований. Значение этой связи в освоении учащимися обоих понятий подробно обсуждается в [14].

Задачи на преобразования можно разбить на две группы: «обычные» геометрические задачи на применение преобразований и задачи о самих преобразованиях. В первой, гораздо более многочисленной группе, как правило, конкретные преобразования применяются к конкретным фигурам, поэтому общие модели преобразований здесь почти не применимы. Но при изучении преобразований как таковых эти модели могут сыграть важную роль. Они позволяют:

- искать неподвижные точки и прямые преобразования (для нахождения образа прямой надо привязать точку X к прямой и построить геометрическое место её образа Y; так же строятся образы других линий);
- изучать зависимость между точкой (или прямой) и её образом (например, при параллельном переносе вектор $\vec{XY}$ не зависит от X, при повороте угол между прямой и её образом постоянный и т. п.);
- определять вид и параметры неизвестного преобразования;
- изучать композиции и итерации преобразований и др.

Отметим, что все эти типы заданий имеют аналоги для динографиков.

Исследовать преобразования можно с помощью следов. На рисунке 14 показаны орбиты двух точек при некотором преобразовании подобия F. Для построения орбиты соединяем произвольную точку X с её образом $F(X)$ и создаем кнопку, которая мгновенно перемещает первую точку во вторую. Включаем рисование следа для точек и отрезка и несколько раз нажимаем на кнопку. Образуется ломаная с вершинами $X, F(X), F^2(X), \ldots$, которые и образуют орбиту точки X. Орбиты на рисунке построены для случая, когда F — это поворотная гомотетия, другое название которой, объясняемое полученной картин-

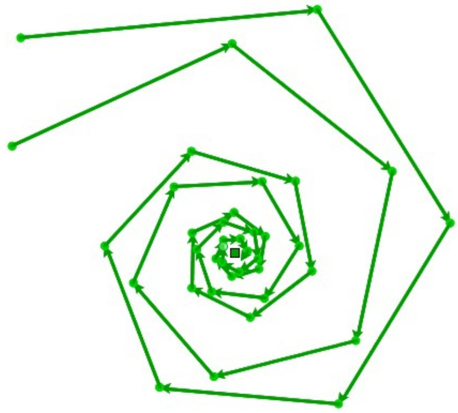


Рис. 14

кой, — спиральное подобие. Построение показывает и то, что подобие F имеет неподвижную точку, и её приблизительное положение. Возникает задача её точного построения. Это своего рода головоломка, которая может показаться неразрешимой, поскольку в общем случае для задания преобразование подобия нужно знать образы двух точек, а у нас есть образ только одной точки X. Действительно, циркулем и линейкой, даже компьютерными, решить её невозможно. Но в СДГ есть инструменты, позволяющие получить недостающие данные. Например, можно построить образ какого-нибудь отрезка как геометрическое место образов его точек, «приклеив» к нему точку X. Задания этого типа были впервые предложены в электронном образовательном комплексе «Математика. 5–11 классы. Практикум» (ЗАО «1С», 2004-2005)[4]. Некоторые задания вошли в [8].

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанные в статье конструкции, создаваемые в системах динамической геометрии, существенно расширяют набор средств визуализации разнообразных функциональных зависимостей, встречающихся в школьной математике. Они проясняют смысл понятия функции и свойств функций, позволяют сделать их не только видимыми, но и осязаемыми, выявляют общую математическую природу числовых функций в алгебре и геометрических преобразований, подкрепляя абстрактные понятия сенсорно-моторным опытом, характерным для работы с СДГ. Открываются возможности для постановки новых задач, для исследовательской и творческой деятельности учеников.

Рассмотренные подходы должны найти применение в новых учебниках, которые будут создаваться с учетом возможности и необходимости компьютерной поддержки.

Список литературы

1. *Дубровский В. Н., Поздняков С. Н.* Динамическая геометрия в школе. Занятие 5. Работа с графиками функций средствами динамической геометрии // Компьютерные инструменты в школе. 2008. № 5. С. 32–45.
2. Вавилов В. Сетчатые номограммы // Квант. 1978. № 9. С. 22–29.

[4] Издание комплекса прекращено, так как большинство использованных в нем программ, в том числе «Живая Геометрия 3.1» не поддерживается современными платформами. Часть материалов готовится к переизданию на новых платформах.

3. Как совершить математическое открытие. https://obr.1c.ru/mathkit/lessons5.html (дата обращения: 22.10.2020).
4. *Flashman M.* Mapping Diagrams and a New Visualization of Complex Functions with GeoGebra, Bridges 2019 Conference Proceedings. P. 295–302.
5. *Brieske T.* Mapping Diagrams, Continuous Functions and Derivatives // The Two-Year College Mathematics Journal. 1978. № 9. P. 67–72. doi: 10.2307/3026603
6. *Goldenberg P., Lewis P., O'Keefe J.* (1992). Dynamic representation and the development of a process understanding of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), The function concept: Aspects of epistemology and pedagogy. Washington, P. 235–260. Mathematical Association of America. Washington, DC.
7. *Sinclair N., Healy L., Sales C.O.R.* Time for telling stories: narrative thinking with dynamic geometry, ZDM Mathematics Education (2009) 41, 441–452. doi: 10.1007/s11858-009-0180-x
8. *Дубровский В. Н., Булычев В. А., Лебедева Н. А.* Математика, 5–11 классы, Коллекция интерактивных моделей, выпуск 8.0. 1С:Паблишинг, 2019. https://obr.1c.ru/mathkit/collection/models/mk_m8._3-01.html doi: (дата обращения: 22.10.2020).
9. *Пантуев А. В.* Устное сообщение (или https://horohoro.ru/collmodels/dyno1.html) (дата обращения: 22.10.2020).
10. *Сгибнев А. И., Дубровский В.Н.* Динографики в курсе алгебры 7–10 классов, Математика в школе. 2021. №2 (в печати)
11. *Bridger M.* Dynamic Function Visualization, The College Mathematics Journal, Vol. 27, No. 5 (Nov., 1996), p. 361–369.
12. *Chijner R.* Visualizing Functions of Two Variables, GeoGebra Book, https://www.geogebra.org/m/qjvkbXxP (дата обращения: 22.10.2020).
13. *Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л.* Прямые и кривые. М.: МЦНМО, 2016.
14. *Steketee S., Scher D.* Connecting functions in geometry and algebra, Mathematics Teacher. 2016. Vol. 109. № 6. P. 448–455.

Поступила в редакцию 15.09.2020, окончательный вариант — 22.10.2020.

Дубровский Владимир Натанович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики СУНЦ МГУ, ✉ dvn18@yandex.ru

---

Computer tools in education, 2020
№ 4: 93–112
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2020-4-93-112

Visualization of Functional Dependences in Dynamic Geometry Systems

Dubrovskii V. N., candidate of physical and mathematical Sciences, ✉ dvn18@yandex.ru

[1]Advanced Science and Education Center of M. V. Lomonosov Moscow State University (Kolmogorov School), 11, Kremenchugskaya str., 121352, Moscow, Russia

Abstract

We describe various methods of visualization of functions and geometric transformations encountered in school mathematics by means of the dynamic geometry systems such as MathKit, The Geometer's Sketchpad, and GeoGebra and their usage scenarios in the spirit of modern trends in education. Novel opportunities for teaching and learning functions and their properties based on computer models are discussed. The focus is on specifically computerized interpretations of functions, in particular, the so-called dynagraphs, in which parallel axes of arguments and values are used, and the correspondence given by the function is found when the argument-point moves along its axis.

Keywords: *vizualization, dynamic geometry, dinagraphs, contour maps, function graphs, geometric transformations, school algebra.*

Citation: V. N. Dubrovskii, "Visualization of Functional Dependences in Dynamic Geometry Systems," *Computer tools in education*, no. 4, pp. 93–112, 2020 (in Russian); doi: 10.32603/2071-2340-2020-4-93-112

References

1. V. N. Dubrovskii and S. N. Pozdniakov, "Dinamicheskaya geometriya v shkole. Rabota s grafikami funktsii sredstvami dinamicheskoi geometrii" [Dynamic geometry at school. Working with graphs of functions using dynamic geometry], *Komp'yuternye instrumenty v shkole*, no. 5, pp. 32–45, 2008 (in Russian).
2. V. Vavilov, "Setchatye nomogrammy" [Grid Nomograms], *Kvant*, no. 9, pp. 22–29, 1978 (in Russian).
3. 1C Company, V. N. Dubrovskii, V. A. Bulychev et al. "How to make a mathematical discovery," in *obr.1c.ru*. [Online] (in Russian). Available: https://obr.1c.ru/mathkit/lessons5.html
4. M. Flashman, "Mapping Diagrams and a New Visualization of Complex Functions with GeoGebra," in *Proc. Bridges 2019 Conference*, pp. 295–302, 2019.
5. T. Brieske, "Mapping Diagrams, Continuous Functions and Derivatives," *Two-Year College Mathematics Journal*, vol. 9, no. 2, pp. 67–72, 1978; doi: 10.2307/3026603
6. P. Goldenberg, P. Lewis, and J. O'Keefe, "Dynamic representation and the development of a process understanding of function," G. Harel and E. Dubinsky, eds., in *The Concept of Function: Aspects of epistemology and pedagogy*, Washington: Mathematical Assn of Amer, 1992, pp. 235–260.
7. N. Sinclair, L. Healy, and C.O.R. Sales, "Time for telling stories: narrative thinking with dynamic geometry," *ZDM Mathematics Education*, vol. 41, pp. 441–452, 2009; doi: 10.1007/s11858-009-0180-x
8. V. N. Dubrovskii, V. A. Bulychev and N. A. Lebedeva, *Mathematics, grades 5-11, Collection of interactive models*, [Soft], iss. 8.0, 1C:Publishing, 2019. [Online] (in Russian). Available: https://obr.1c.ru/mathkit/collection/models/[mk_m8]_3-01.html
9. A. V. Pantuev, "EDUCATIONAL materials and links," in *horohoro.r*. [Online] (in Russian). Available: https://horohoro.ru)
10. A. I. Sgibnev, "Dinographics in the course of algebra 7-10 grades," *Mathematics in School*, (in print).
11. M. Bridger, "Dynamic Function Visualization," *The College Mathematics Journal*, vol. 27, no. 5, pp. 361–369, 1996.
12. R. Chijner, "Visualizing Functions of Two Variables" in *GeoGebra Book*. [Online]. Available: http://www.geogebra.org/m/qjvkbXxP
13. N. B. Vasil'ev and V. L. Gutenmakher, *Pryamye i krivye* [Straight lines and curves], Moscow: MCCME, 2016 (in Russian).
14. S. Steketee and D. Scher, "Connecting functions in geometry and algebra," *Mathematics Teacher*, vol. 109, no. 6, pp. 448–455, 2016; doi: 10.5951/mathteacher.109.6.0448

Received 15.09.2020, the final version — 22.10.2020.

Vladimir Dubrovskii, candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor of the Department of mathematics, SUNC MSU, ✉ dvn18@yandex.ru